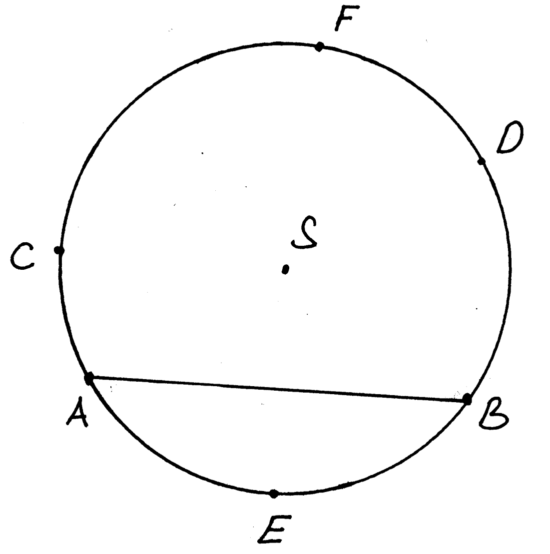
Centralni i periferiski ugao

Posmatrajmo kružnicu s centrom u tački S poluprečnika r ($k(S,r)$).



Duž AB je tetiva kruga

$\sphericalangle ASC$ zovemo centralni ugao nad tetivom AB ili centralni ugao nad lukom $\overset{\frown}{AEB}$.

Uglovi $\sphericalangle ACB$, $\sphericalangle AFB$ ili $\sphericalangle ADB$ zovemo oštri periferiski uglovi nad tetivom AB ili oštri periferiski uglovi nad lukom $\overset{\frown}{AEB}$.

$\sphericalangle AEB$ zovemo tupi periferiski ugao nad tetivom AB ili tupi periferiski ugao nad lukom $\overset{\frown}{AFB}$ (ili $\overset{\frown}{ACB}$ ili $\overset{\frown}{ADB}$).

Oko trougla ΔKLM, čiji uglovi su $\sphericalangle MKL = 51°$ i $\sphericalangle KML = 41°$ je opisana kružnica. Tačka N je proizvoljna tačka kružnice koja pripada onom dijelu luka KL u kojoj nije tačka M. Izračunati $\sphericalangle KNL + \sphericalangle KNM$.

Rješenje: $\sphericalangle KNL + \sphericalangle KNM = 227°$

Oko trougla ΔEDA je opisana kružnica $k(S,r)$ gdje se centar S nalazi unutar trougla. Ako je $\sphericalangle ESD = 80°$ i $\sphericalangle SDA = 40°$ izračunati $\sphericalangle AES$.

Rješenje: $\sphericalangle AES = 10°$.

Oko trougla ΔINE je opisana kružnica k. Tačka H je tačka na kružnici koja pripada onoj poluravni sa ivicom u $p(I,N)$ u kojoj nije tačka E. Ako je $\sphericalangle EHN = 55°$ i $\sphericalangle IEN = 70°$ izračunati $\sphericalangle INE$.

Rješenje: $\sphericalangle INE = 55°$.

(#) Dokazati da je oštar periferiski ugao nad tetivom jednak polovini centralnog ugla nad istom tetivom.

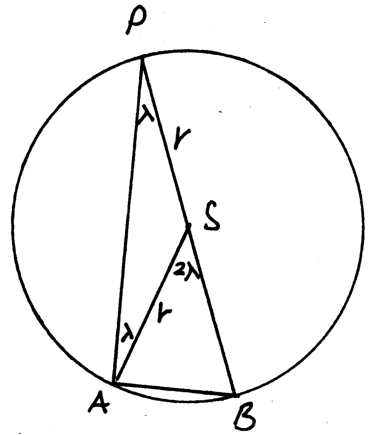
Rj. Razmotrimo tri slučaja koja se mogu desiti

1° centar S kružnice pripada jednom kraku periferiskog ugla

2° centar S kružnice pripada unutrašnjoj oblasti periferiskog ugla

3° centar S kružnice pripada vanjskoj oblasti periferiskog ugla

1°



AB tetiva

$\sphericalangle APB$ oštri periferiski ugao nad tetivom AB

$S \in PB$, $\sphericalangle ASB$ centralni ugao nad tetivom AB

ΔASP je jkk $(AS \cong SP = r)$

$\Rightarrow \sphericalangle SAP \cong \sphericalangle SPA = \lambda$

$\sphericalangle ASB$ vanjski ugao $\Delta ASP \Rightarrow \sphericalangle ASB = 2\lambda$

$\Rightarrow \sphericalangle APB = \frac{1}{2} \sphericalangle ASB$

q.e.d.

2° CD tetiva

$\sphericalangle CQD$ oštar periferiski ugao nad tetivom CD

$S \in$ unutrašnjosti $\sphericalangle CQD$

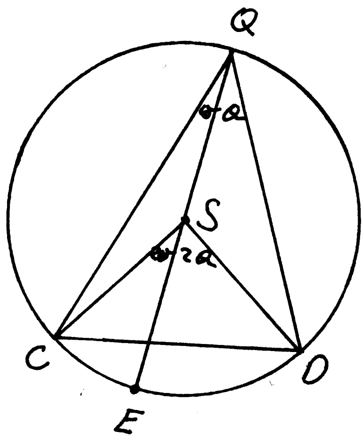
$\sphericalangle CSD$ centralni ugao nad tetivom

Neka je QE prečnik kružnice

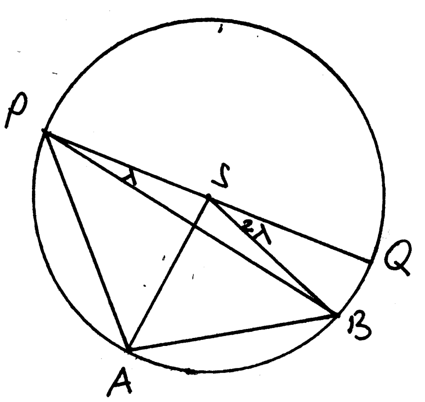
Tada na osnovu prvog slučaja imamo

$$+\left.\begin{array}{l} \sphericalangle CQE = \frac{1}{2} \sphericalangle CSE \\ \sphericalangle DQE = \frac{1}{2} \sphericalangle DSE \end{array}\right\} \xRightarrow{\text{(sabereno)}} \sphericalangle CQD = \frac{1}{2} \sphericalangle CSD$$

q.e.d.



3°



AB tetiva

$\sphericalangle APB$ oštar periferiski ugao

$S \in$ vanjskoj oblasti $\sphericalangle APB$

Označimo sa PQ prečnik kružnice

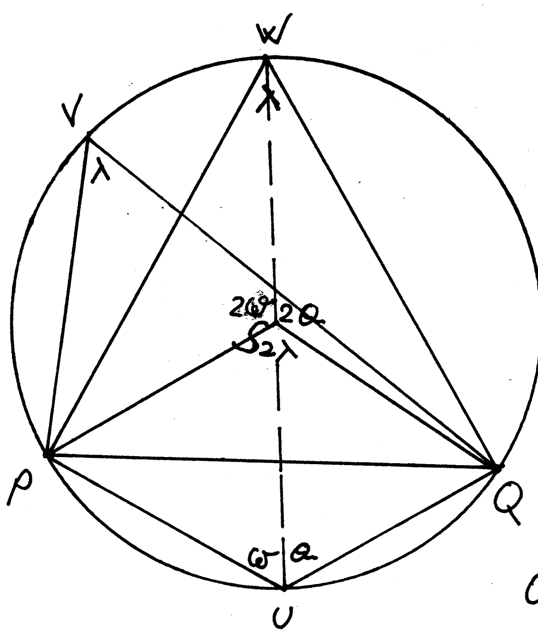
Tada prema prvom slučaju možemo zaključiti

$$\left.\begin{array}{l} \sphericalangle APQ \cong \frac{1}{2} \sphericalangle ASQ \\ \sphericalangle BPQ \cong \frac{1}{2} \sphericalangle BSQ \end{array}\right\} \xRightarrow[\text{oduzmemo}]{\text{ako ova dva ugla}} \sphericalangle APB \cong \frac{1}{2} \sphericalangle ASB$$

q.e.d.

Dokazati da je suma oštrog i tupog periferiskog ugla nad istom tetivom 180°.

Rj.



PQ tetiva

$\measuredangle PUQ$ tupi periferiski ugao nad tetivom PQ

$\measuredangle PVQ$ oštri periferiski ugao nad tetivom PQ

Dokažimo da je $\measuredangle PVQ + \measuredangle PUQ = 180°$.

Neka je $\measuredangle PSQ$ centralni ugao nad tetivom PQ.

Tada je $\measuredangle PVQ = \frac{1}{2}\measuredangle PSQ$. ...(*)

Označimo sa W tačku na kružnici tako da je UW prečnik kružnice.

Tada je $\measuredangle PWQ$ oštri periferiski ugao nad tetivom PQ

pa je $\measuredangle PWQ = \frac{1}{2}\measuredangle PSQ \overset{(*)}{\Rightarrow} \measuredangle PVQ = \measuredangle PWQ = \lambda$.

Ako uvedemo oznake $\measuredangle PUW = \omega$ i $\measuredangle QUW = \theta$

(ovo su oštri periferiski uglovi nad tetivama PW i QW)

tada na osnovu prvog zadatka imamo

$\measuredangle PSW = 2\omega$ i $\measuredangle QSW = 2\theta$.

Sad imamo $2\lambda + 2\omega + 2\theta = 360°$ /: 2

$\lambda + \omega + \theta = 180°$

tj. $\measuredangle PVQ + \measuredangle PUQ = 180°$

q.e.d.

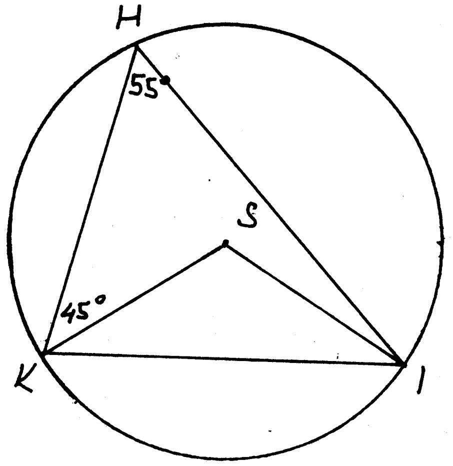
Posljedice ova dva zadatka su

a) svi oštri (ili tupi) periferiski uglovi nad istom tetivom su podudarni

b) periferiski ugao nad prečnikom je prav.

Oko trougla ΔKIH je opisana kružnica $k(S,r)$. Ako je $\sphericalangle KHI = 55°$ i $\sphericalangle SKH = 45°$ izračunati ostale uglove u trouglu.

Rj.



$\sphericalangle KHI = 55° \Rightarrow \sphericalangle KSI = 110°$

$\sphericalangle KSI = 110°$ i ΔKIS jkk $\Rightarrow \sphericalangle SKI \cong \sphericalangle KIS$

$\sphericalangle KIS = \frac{180° - 110°}{2} = 35° = \sphericalangle SKI$

$\sphericalangle HKI = 45° + 35° = 80°$

$\sphericalangle KHI = 55°$

$\sphericalangle KIH = 180° - 80° - 55° = 45°$

Četiri važne tačke za trougao su

a) ortocentar (sjecište visina trougla)
(mi ćemo ga označavati sa slovom H)

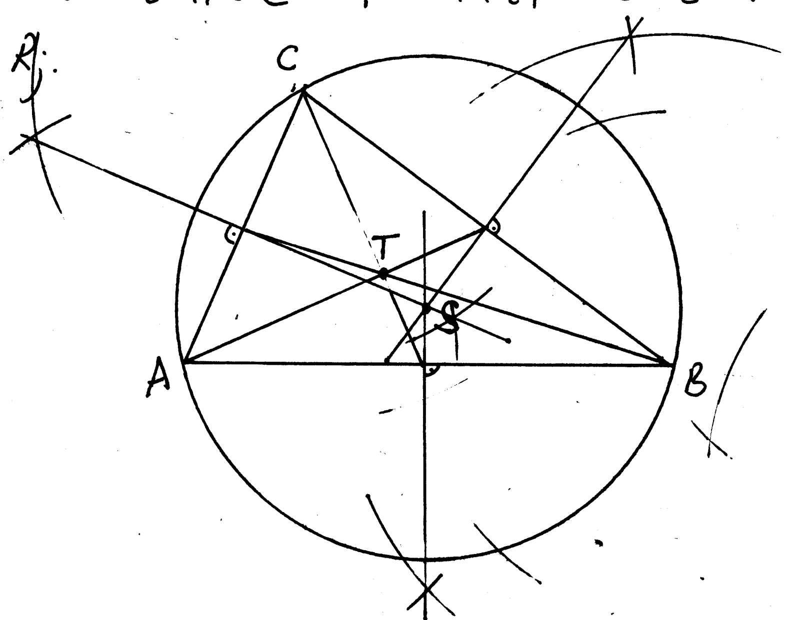
b) centar opisane kružnice (sjecište simetrala stranica)
(mi ćemo ga označavati sa slovom S)

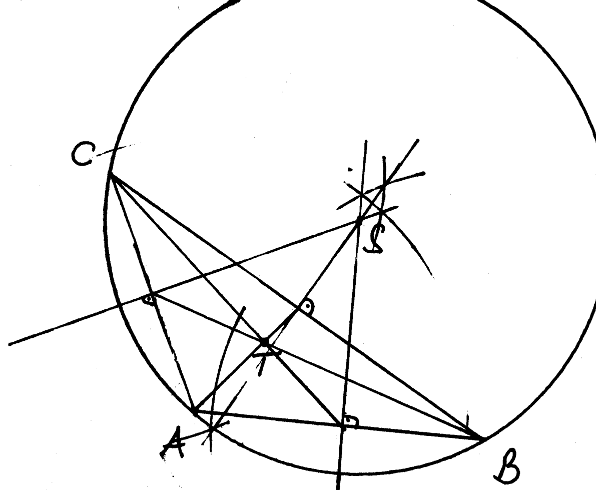
c) centar upisane kružnice (sjecište simetrale uglova)
(mi ćemo ga označavati sa slovom I)

d) težište (presjek težišnica)
(mi ćemo ga označavati sa slovom T)

Datom oštrouglom i tupouglom trouglu opisati kružnice i naći težište trougla.

Rj.





Tetivni četverougao

Četverougao oko koga se može opisati kružnica zove se tetivni četverougao.

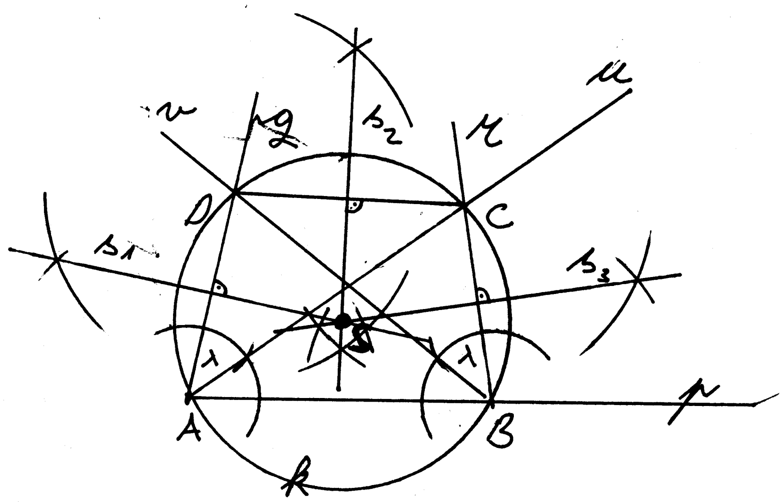
Potrebni i dovoljni uslovi da četverougao bude tetivni:

a) da mu suma dva naspremna ugla četverougla iznosi 180°

b) da su mu uglovi pod kojima se vidi bilo koja stranica iz druga dva vrha jednaki

c) da vrijedi $SA \cdot SC = SB \cdot SD$ gdje je S presjek dijagonala.

(1.) Nacrtati četverougao $\square ABCD$ oko koga možemo opisati kružnicu, pa nacrtati kružnicu.

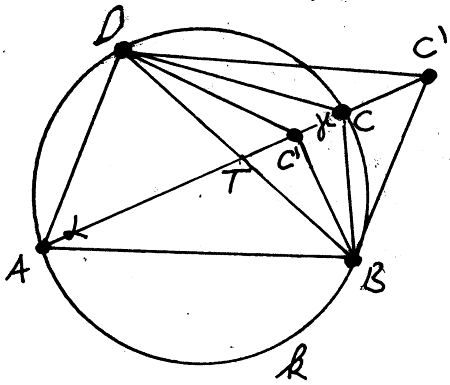


Konstrukcija

1. pp p sa početnom tačkom A
2. pp q sa početnom tačkom A $(p \not\equiv q)$
3. proizvoljni ugao λ tako da je $\lambda < \measuredangle pAq$
4. pp r sa početnom tačkom B, gdje je B proizvoljna tačka poluprave p, tako da je $\measuredangle ABr > \lambda$,
5. pp u takva da $\measuredangle qAu = \lambda$ i pp u se nalazi sa one strane pp q sa koje je i pp p
6. pp ν takva da $\measuredangle rB\nu = \lambda$ i pp ν se nalazi sa one strane pp r sa koje je pp q.
7. $u \cap r = \{C\}$, $\nu \cap q = D$
8. $\square ABCD$
9. simetrale s_1, s_2, s_3 redom stranica AD, CD i BC
10. $s_1 \cap s_2 \cap s_3 = \{S\}$
11. $k(S, SA)$

Dat je četverougao $\square ABCD$ kod koga je $\sphericalangle A + \sphericalangle C = 180°$. Dokazati da je četverougao tetivni.

Rj.



Označimo sa $\alpha = \sphericalangle DAB$ i $\gamma = \sphericalangle BCD$.
Znamo da je $\alpha + \gamma = 180°$
Neka je k kružnica opisana oko trougla $\triangle ABD$.
Označimo sa T presjek dijagonala četverougla.

Neka $pp[A,T) \cap k = \{C'\}$. Moguć je jedan od sljedeća tri slučaja

a) $A - C - C'$

b) $A - C' - C$

c) $C \equiv C'$

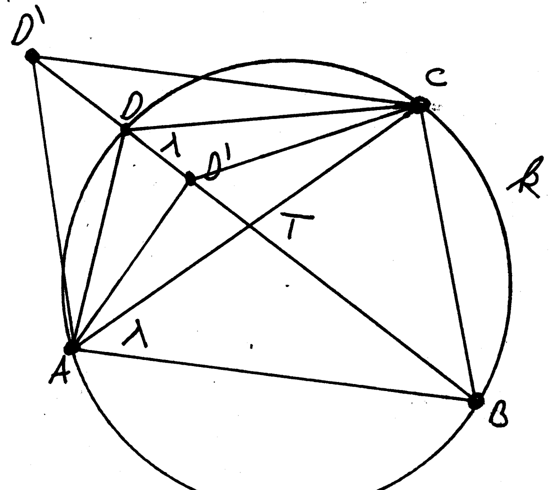
Znamo da suma oštrog i tupog periferiskog ugla iznosi $180°$.

Ako bi bio slučaj pod a) ili pod b) došli bi do kontradikcije (KAKO?). Prema tome mora biti slučaj pod c) tj. četverougao je tetivni

q.e.d.

Dat je četverougao $\square ABCD$. Ako je $\sphericalangle BAC \cong \sphericalangle CDB = \lambda$ dokazati da je četverougao tetivni.

Rj. Označimo sa T presjek dijagonala četverougla. Neka je k kružnica opisana oko trougla $\triangle ABC$.



$pp[B,T) \cap k = \{D'\}$

Moguć je jedan od sljedeća tri slučaja,

a) $B - D' - D$

b) $B - D - D'$

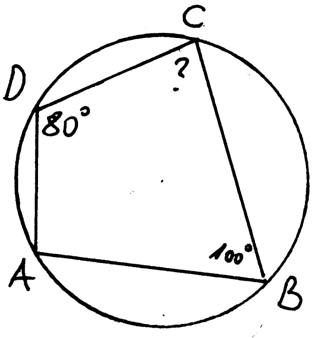
c) $D \equiv D'$

Posmatrajmo tetivu BC. Znamo da su svi oštri periferiski uglovi nad istom tetivom podudarni. Ako bi pretpostavili da je slučaj pod a) ili pod b) došli bi do kontradikcije (KAKO?) Prema tome mora biti slučaj pod c) tj. četverougao je tetivni.

q.e.d.

U tetivnom četverouglu □ABCD je ugao pod B 100°. Izračunati ugao pod C.

Rj.



□ABCD tetivni

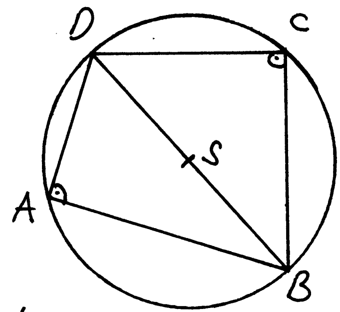
$\measuredangle B = 100^\circ \Rightarrow \measuredangle CDA = 80^\circ$

Ugao pod C se ne može izračunati.

U četverouglu □ABCD je $\measuredangle A = \measuredangle C = 90^\circ$.

a) Da li je ovaj ugao tetivni?

b) Ukoliko jeste odrediti gde leži njegov centar opisane kružnice?



Rj. a) Suma dva naspremna ugla četverougla iznosi 180° pa je □ABCD tetivni.

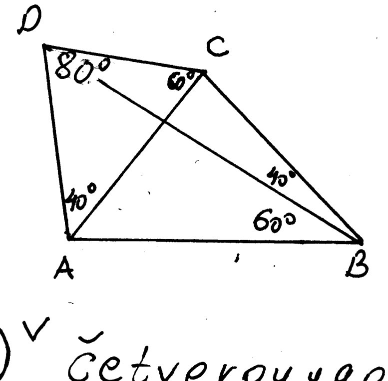
b) Ugao nad prečnikom je prav.

BD je prečnik opisane kružnice

$\Rightarrow$ centar S opisane kružnice se nalazi na sredini dijagonale BD.

U četverouglu □ABCD je $\measuredangle CAD = \measuredangle CBD = 40^\circ$. Ako je $\measuredangle D = 80^\circ$ izračunati $\measuredangle DBA$ i $\measuredangle BAC$.

Rj.



$\measuredangle CAD = \measuredangle CBD = 40^\circ \Rightarrow$ □ABCD je tetivni

$\measuredangle D = 80^\circ \Rightarrow \measuredangle B = 100^\circ \Rightarrow \measuredangle DBA = 60^\circ$.

$\measuredangle BAC$ se ne može izračunati.

Četverougao □AVOM je upisan u kružnica k i $\{S\} = AO \cap VM$. Ako su $\measuredangle VAO = 40^\circ$ i $\measuredangle AOM = 70^\circ$ odrediti ugao $\measuredangle OSV$.

Rješenje $\measuredangle OSV = 110^\circ$.

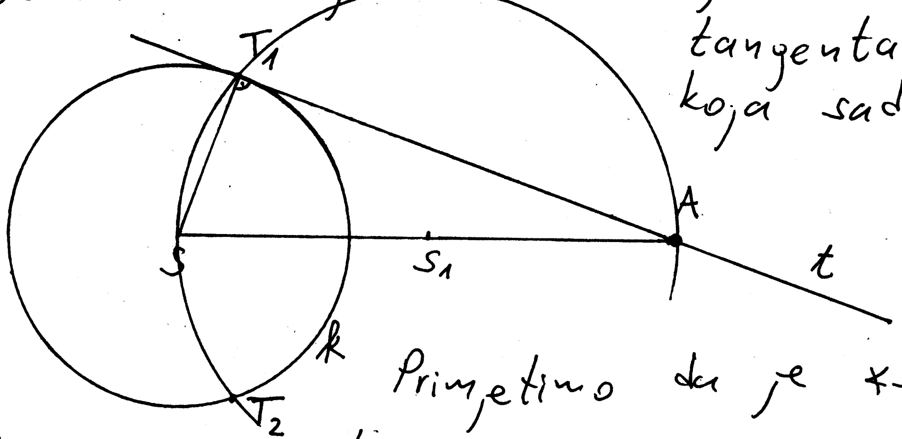
Tangenta na kružnicu

Tangenta na kružnicu je prava koja dodiruje kružnicu.

1. Iz date tačke van date kružnice konstruisati tangentu na tu kružnicu.

Analiza

Pretpostavimo da je zadatak riješen. Neka je t tražena tangenta na kružnicu $k(S, r)$ koja sadrži tačku A.



Označimo sa T_1 dodirnu tačku tangente i kružnice.

Primjetimo da je $\angle ST_1A = 90°$ pa je centar opisane kružnice $\triangle AT_1S$ na sredini duži AS. Kako su tačke A i S date to nije teško konstruisati tačku T a poslije toga i tangentu $t = p(A, T_1)$.

Konstrukcija

1. $k(S, r)$, A van date kružnice
2. sredinu duži AS (tačku S_1)
3. $k(S, S_1S) \cap k = \{T_1, T_2\}$
4. $t_1 = p(A, T_1)$, $t_2 = p(A, T_2)$

NACRTATI SLIKU

Dokaz

Trebamo dokazati da su konstruisane prave t_1 i t_2 tangente na krug $k(S, r)$. Ovo slijedi iz analize i konstrukcije. (U Analizi smo se pozvali na osobinu pravouglog trougla da mu je centar opisane kružnice na sredini hipotenuze. Ovo nećemo dokazivati zato što podrazumijevamo da je to poznato od ranije).

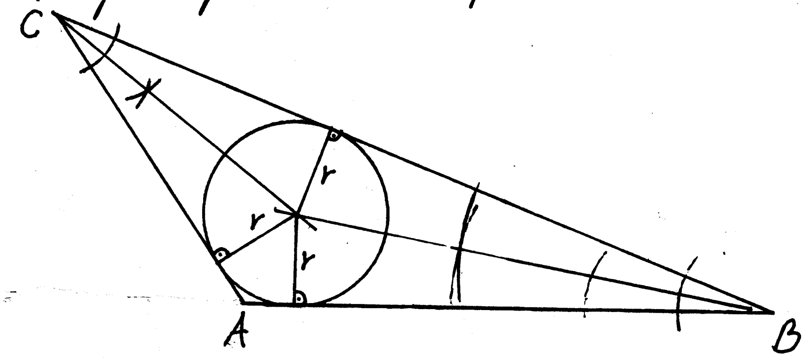
Diskusija

Zadatak uvijek ima dva rješenja.

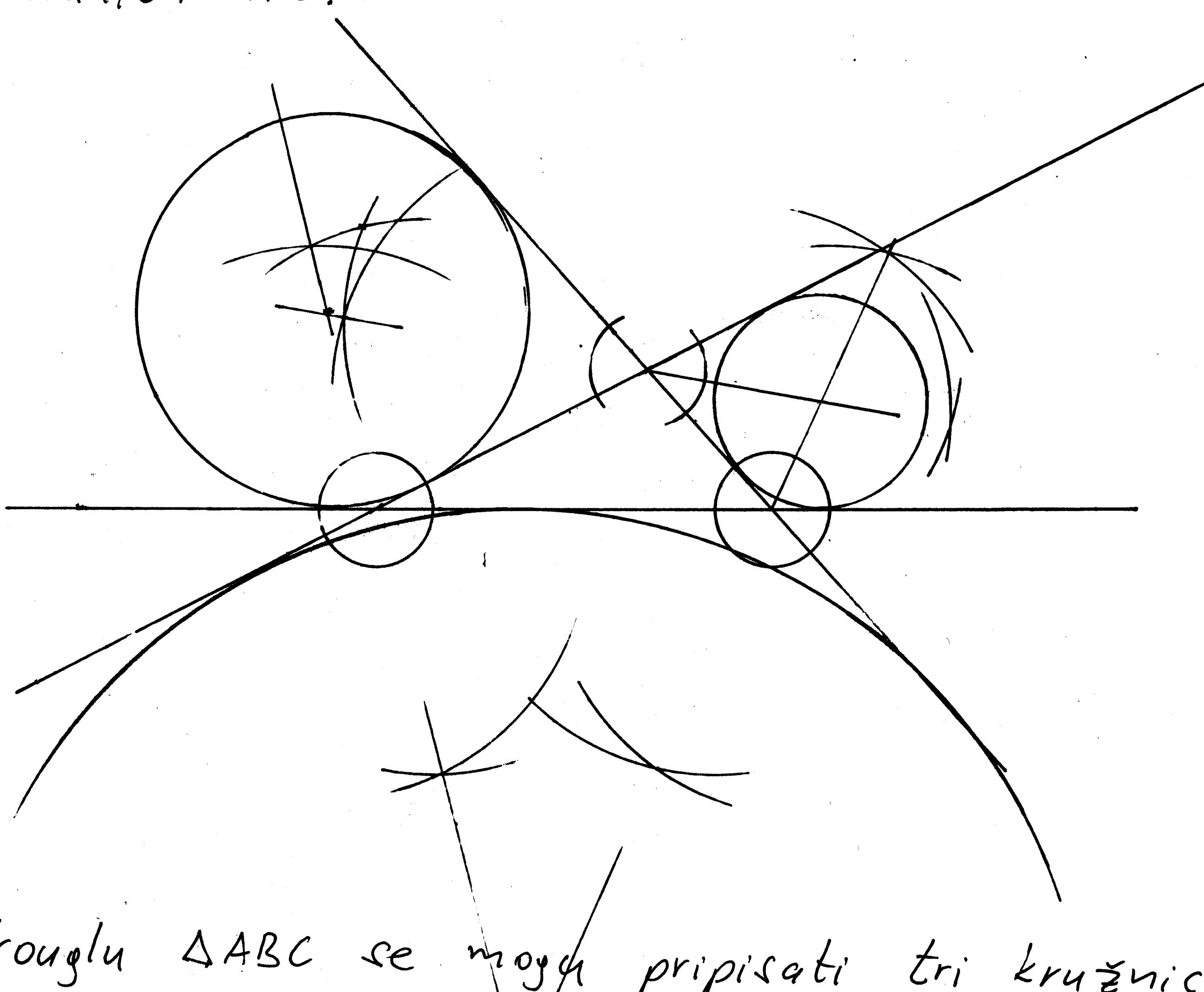
Napomena: Duži AT_1 i AT_2 zovu se odsječci tangente i vrijedi $AT_1 \cong AT_2$ (Dokaz slijedi iz podudarnosti dvije stranice ($ST_1 \cong ST_2$, $SA \cong SA$) i ugla ($90°$)).

2. Datom tupouglom trouglu upisati kružnicu i na slici označiti poluprečnik upisane kružnice.

Rj:



3. Datom trouglu ΔABC pripisati kružnicu koja dodiruje stranicu AC.



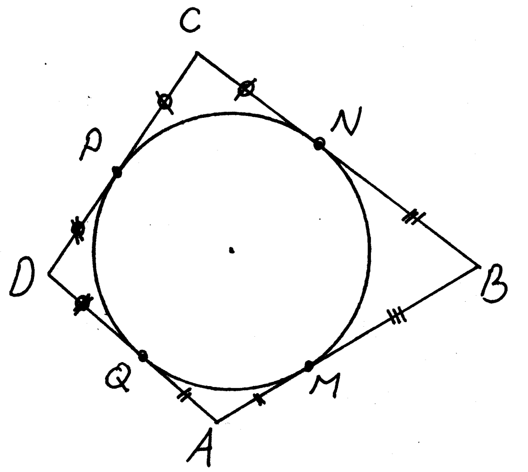
Trouglu ΔABC se mogu pripisati tri kružnice.

4. U trouglu ΔABC je upisana kružnica $k(I,r)$. Kružnica dodiruje stranicu BC, AC i AB u tačkama D, E i F redom. Ako je $AF=6$, $BD=8$, $CE=7$ i $r=4$ izračunati obim trougla (i površinu).

Rješenja: $O=42$ $\quad P=r\cdot s=84$

Tangentni četverougao

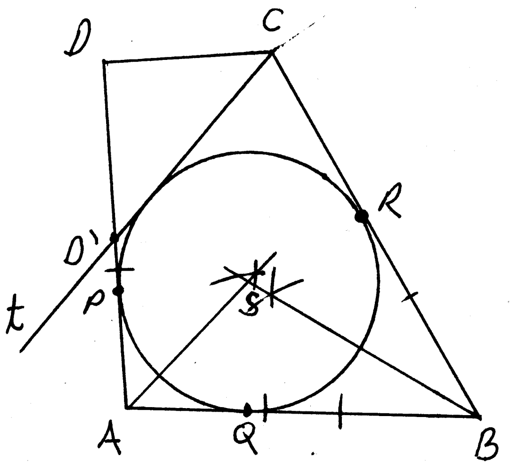
Četverougao u koji se može upisati kružnica zove se tangentni četverougao. Potreban i dovoljan uslov da četverougao $\square ABCD$ bude tangentni jeste $AB+CD \cong BC+AD$.



$$AM \cong AQ$$
$$BM \cong BN$$
$$CN \cong CP$$
$$DP \cong DQ \quad +$$
$$\overline{AB+CD \cong BC+AD}$$

(1.) Dat je četverougao $\square ABCD$. Ako je $AB+CD \cong BC+AD$ dokazati da je tada četverougao tangentni.

Rj.



Označimo sa S presjek simetrale uglova $\measuredangle ABC$ i $\measuredangle BAD$. Neka je k kružnica koja je upisana u četverougao i koja dodiruje stranice AD, AB i BC. Iz tačke C postavimo tangentu t na kružnicu.

$$\{D'\} = [A,D\rangle \cap t$$

Moguća su sljedeća tri slučaja
a) $A-D'-D$
b) $A-D-D'$
c) $D \equiv D'$

Označimo sa P, Q i R dodirne tačke kružnice sa stranicama AD, AB i BC redom. Imamo

$$AB+CD \cong BC+AD$$
$$-\ AB+CD' \cong BC+AD'$$
$$\overline{CD-CD' \cong AD-AD'}$$

Kako je $AD-AD' \cong DD'$ imamo:

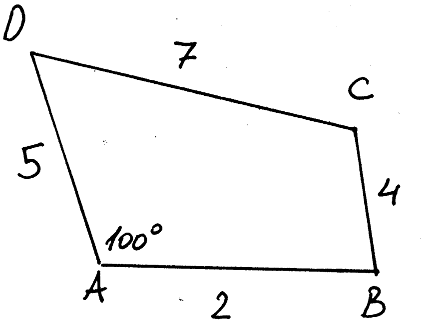
$$CD-CD' \cong DD' \quad \Rightarrow \quad CD \cong CD'+DD' \quad \# \text{kontradikcija } (CD < CD'+DD' \text{ u } \triangle CDD')$$

Slično bi pokazali da nije ni slučaj pod b).

Prema tome $D \equiv D'$ tj. dati četverougao $\square ABCD$ je tangentni.

2. U četverouglu □ABCD je $AB=2$, $BC=4$, $CD=7$ i $AD=5$. Ako je $\measuredangle A=100°$ izračunati ugao $\measuredangle C$.

Rj.



$AB+CD \stackrel{?}{=} BC+AD$

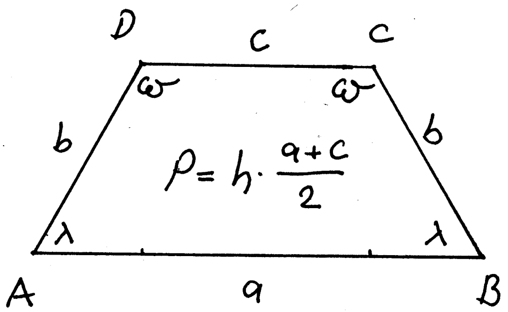
□ABCD je tangentni

$\measuredangle C$ se ne može izračunati

3. Obrazložiti da li je trapez tetivni ili tangentni četverougao.

Rj. jednakokraki trapez

Četverougao koji ima tačno jedan par paralelnih stranica zovemo trapez.

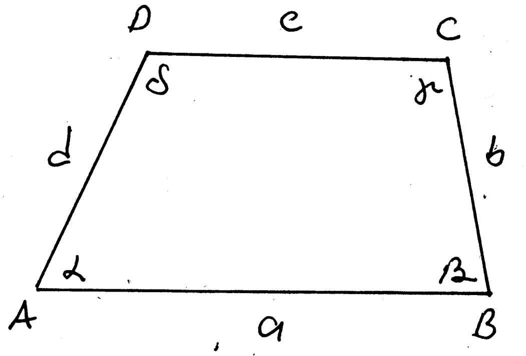


$\measuredangle A+\measuredangle C=\measuredangle B+\measuredangle D=\lambda+\omega=180°$

jednakokraki trapez jest tetivni četverougao

jednakokraki trapez je tangentni četverougao samo u slučaju kada je $a+c=2b$

trapez



Za opšti slučaj ako ne znamo veličinu uglova ni dužine stranica ne možemo ništa reći

Ako je $a+c \stackrel{?}{=} b+d$ tada trapez je tangentni četverougao.

Ako je $\alpha+\gamma=180°$ ili $\beta+\delta=180°$ tada je trapez tetivni četverougao.

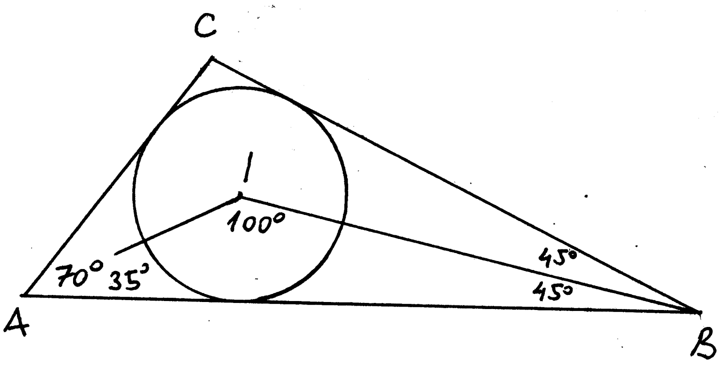
4. U četverouglu □KONS je upisana kružnica. Ako je $KO=5$ poluprečnik upisane kružnice $r=6$, dijagonala $SO=8$ i stranica $SN=7$ izračunati obim četverougla.

Rješenje: $O_{□KONS}=24$.

Razni zadaci

1. U trouglu $\triangle ABC$ I je centar upisane kružnice. Ako je ugao $\alpha = 70°$ i $\measuredangle AIB = 100°$ izračunati ugao γ.

Rj.



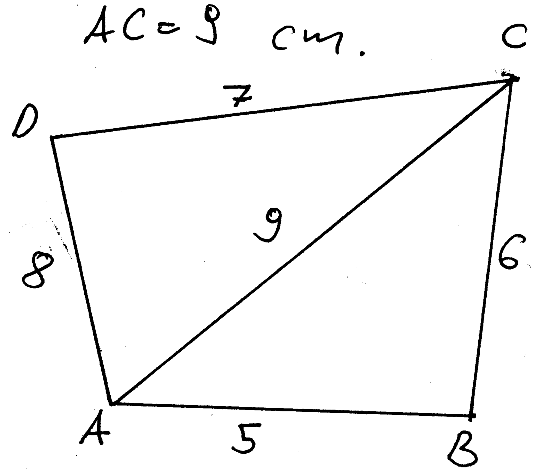
$\alpha = \measuredangle BAC = 70° \Rightarrow \measuredangle BAI = 35°$

$\Rightarrow \measuredangle ABI = 45°$

$\Rightarrow \gamma = 20°$

2. Da li možemo konstruisati četvorougao $\square ABCD$ kod koga je $AB = 5$ cm, $BC = 6$ cm, $CD = 7$ cm, $AD = 8$ cm i $AC = 9$ cm.

Rj.



U $\triangle ABC$ su poznate tri stranice pa ga možemo konstruisati.
U $\triangle ACD$ su poznate tri stranice pa ga možemo konstruisati.
$\square ABCD$ možemo konstruisati

3. Bez analize, dokaza i diskusije konstruisati četvorougao iz prethodnog primera.

Rj. Konstrukcija

1. poluprava p sa početnom tačkom A
2. $k(A, AB) \cap p = \{B\}$
3. $k(A, AC) \cap k(B, BC) = \{C\}$
4. $k(A, AD) \cap k(C, CD) = \{D\}$
5. $\square ABCD$

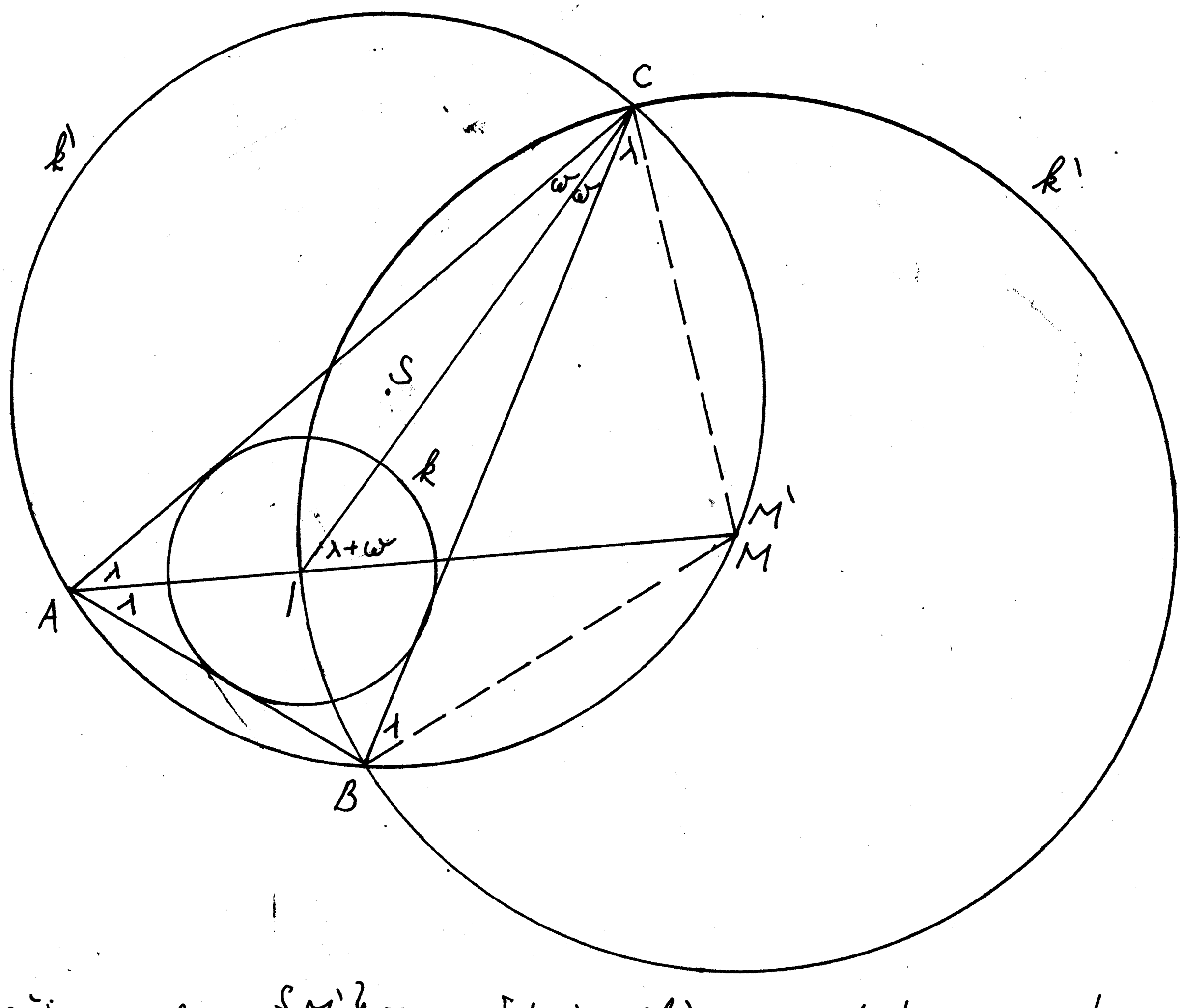
NACRTATI SLIKU

(#) U $\triangle ABC$ je upisana kružnica sa centrom u I. Dokazati da se centar opisane kružnice oko $\triangle BCI$ nalazi na presjeku $pp[A,I)$ i kružnice koja je opisana oko $\triangle ABC$.

Rj.

postavka zadatka

$$\left.\begin{array}{l} \triangle ABC, \\ k(I,r) \text{ upisana kružnica u } \triangle ABC \\ k'(S,r') \text{ kružnica opisana oko } \triangle ABC \\ k''(M,r'') \text{ kružnica opisana oko } \triangle BCI \end{array}\right\} \Rightarrow pp[A,I) \cap k' = \{M\}$$



Označimo sa $\{M'\} = pp[A,I) \cap k'$, pa dokažimo da je $M' \equiv M$.

Uvedimo oznake $\sphericalangle CAI \cong \sphericalangle BAI = \lambda$ i $\sphericalangle ACI \cong \sphericalangle BCI = \omega$.

$\square ABM'C$ je tetivni $\Rightarrow \sphericalangle M'BC \cong \sphericalangle CAM' = \lambda$ i $\sphericalangle BCM' \cong \sphericalangle BAM' = \lambda$

$\triangle CBM'$ je jkk sa osnovicom u $BC \Rightarrow M'$ pripada simetrali stranice BC ...(*)

$\sphericalangle M'IC$ je vanjski ugao $\triangle AIC \Rightarrow \sphericalangle M'IC = \lambda + \omega$.

$\triangle M'CI$ je jkk sa osnovicom u $IC \Rightarrow M'$ pripada simetrali stranice IC ...(**)

Iz (*) i (**) $\Rightarrow M'$ je centar opisane kružnice $\triangle CIB \Rightarrow M \equiv M'$

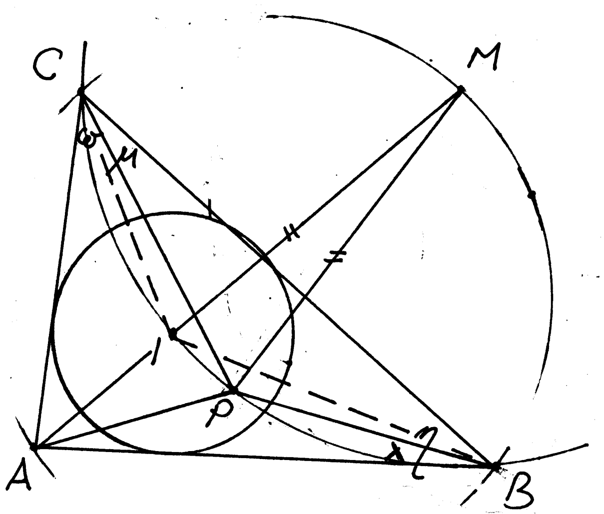
$\Rightarrow pp[A,I) \cap k' = \{M\}$ q.e.d.

(#) Neka je I centar upisane kružnice ΔABC. U unutrašnjosti ΔABC data je tačka P takva da je

$$\measuredangle PBA + \measuredangle PCA = \measuredangle PBC + \measuredangle PCB.$$

Dokazati da je $AP \geq AI$ te da jednakost vrijedi akko se tačka P podudara sa tačkom I.

Rj.



postavka zadatka

ΔABC
$k(I, r)$ kružnica upisana u ΔABC
P tačka u unutrašnjosti ΔABC takva
$\measuredangle PBA + \measuredangle PCA = \measuredangle PBC + \measuredangle PCB$.

$\Rightarrow \quad AP \geq AI$

Uvedimo oznake $\measuredangle PBA = \lambda$, $\measuredangle PCA = \omega$, $\measuredangle PBC = \eta$, $\measuredangle PCB = \mu$.
$\measuredangle ABC = \beta$, $\measuredangle ACB = \gamma$

Tada $\left.\begin{array}{l} \lambda + \omega = \mu + \eta \\ \lambda + \omega + \mu + \eta = \beta + \gamma \end{array}\right\} \Rightarrow \quad \lambda + \omega = \mu + \eta = \frac{\beta + \gamma}{2}$

$\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ \quad /:2$

$\frac{\beta + \gamma}{2} = 90^\circ - \frac{\alpha}{2}$ pa $\mu + \eta = 90^\circ - \frac{\alpha}{2}$

$\measuredangle BPC = 180^\circ - (\mu + \eta) = 90^\circ + \frac{\alpha}{2} \quad \ldots (*)$

$\measuredangle BIC = 180^\circ - (\measuredangle IBC + \measuredangle ICB) = 180^\circ - \left(\frac{\beta}{2} + \frac{\gamma}{2}\right) = 90^\circ + \frac{\alpha}{2} \quad \ldots (**)$

$(*)$ i $(**)$ $\Rightarrow$ $\square IPBC$ je tetivni četverougao.

Prema prethodnom zadatku centar opisane kružnice ΔBCI se nalazi na presjeku $p[A, I)$ i kružnice opisane oko ΔABC. Označimo tu tačku sa M. Imamo $IM \cong PM$.

Posmatramo ΔAMP. Imamo $AM < AP + PM$ tj. $AI + MI < AP + PM$
$\Rightarrow \quad AI < AP$ q.e.d.

(Jednakost vrijedi samo u slučaju kada $P \equiv I$).